

BA) Corrigé devoir surveillé n°=01 (02^{ème} année) 2011/2012 :

Exercice01: (sur 06 pts)

01) Loi du couple (x,y):

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	0	1	2
0	0	1/8	1/8
1	1/8	2/8	1/8
2	1/8	1/8	0

Loi marginale de x :

x	0	1	2
P _x	1/4	1/2	1/4

Loi marginale de y :

y	0	1	2
P _y	1/4	1/2	1/4

$P(x=0, y=0)=0 \neq P(x=0)P(y=0)=\frac{1}{16}$ donc les variables aléatoires x et y ne sont pas indépendantes.

$$01) E(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = E(y)$$

$$E(xy) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

Exercice02 : (sur 06 pts)

1) Il faut que : $pq + q^2 + pq + p^2 = 1$

càd : $2pq + p^2 + q^2 = (p+q)^2 = 1 \Rightarrow p+q=1 \Rightarrow p=1-q$

2)

x	-1	1
p_x	q	p

 $E(x) = -q + p$

y	-1	1
p_y	$2pq$	$p^2 + q^2$

$$E(y) = -2pq + p^2 + q^2 = (p - q)^2$$

$$E(x^2) = q + p = 1$$

$$E(y^2) = 2pq + p^2 + q^2 = (p + q)^2 = 1$$

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = 1 - (-q + p)^2$$

$$V(y) = E(y^2) - E^2(y) = 1 - (p - q)^4$$

3) Si les variables x et y sont indépendantes alors

$$P(x = -1, y = -1) = P(x = -1) P(y = -1)$$

$$\text{D'où } (2pq) q = pq \text{ cad: } 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Et comme } p = 1 - q \text{ alors } p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4) $p = q = \frac{1}{2}$ alors:

$\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$	-1	1	Marg x
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Marg y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Le tableau de probabilités conditionnelles de x relatif à y :

$\begin{array}{c} y \\ \backslash \\ x \end{array}$	-1	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P_{Y=y_i}(x=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_i)}{p(Y=y_i)}$$

Exercice 03 : (sur 08pts)

1) f est densité conjointe donc $f \geq 0$ et $\iint f(x, y) dx dy = 1$

$$\text{D'où } k \geq 0 \text{ et } \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{xy}} dx dy = 1 \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow k \int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy = k \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) dx = k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} 2\sqrt{y} \Big|_x^1 dx$$

$$= 2k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) dx = 2k \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = 2k = 1 \Rightarrow k = 1/2$$

$$\text{D'où : } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Densité marginale de x :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 \frac{dy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{y} \Big|_x^1 dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} (1 - \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, \text{ pour } 0 < x < 1$$

Fonction densité marginale de y

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}} dx = 1 \text{ pour } 0 < y < 1$$

$f(x, y) \neq f_x(x)f_y(y)$ Donc X et Y ne sont pas indépendantes

2) Fonction de répartition conjointe de (x,y)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \\ 2\sqrt{xy} - x & , \text{ si } 0 < x \leq y < 1 \\ 2\sqrt{x} - x & , \text{ si } 0 < x \leq 1 \text{ et } y \geq 1 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

4) Fonction densité conditionnelle de y sachant $x = \frac{1}{2}$

$$f_{y/x=\frac{1}{2}}(y) = \frac{f(\frac{1}{2}, y)}{f_x(\frac{1}{2})} = \frac{F(\frac{1}{2}, y)}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{ si } 0 < \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & \text{ ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2-\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{ si } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 & \text{ ailleurs} \end{cases}$$